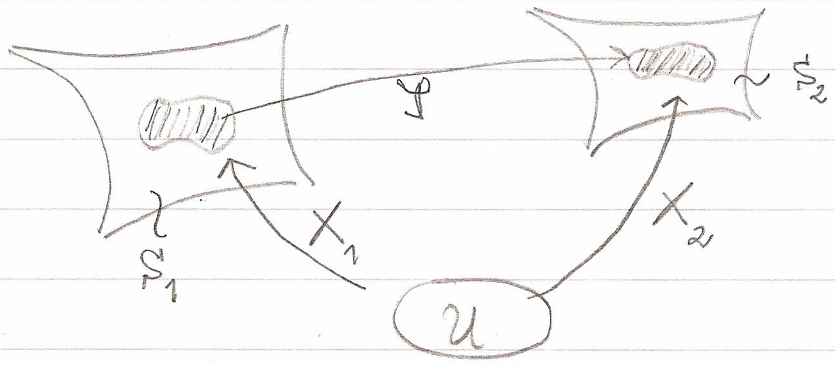
Isometrie.



Beweis: Sei $p \in X_1(U)$, $w \in T_p S_1$. Dazu wähle man eine Kurve $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U$ mit

$$X_1(\alpha(0)) = p, \qquad w = \frac{d}{dt}\Big|_0 (X_1 \circ \alpha)(t).$$

Dann gilt:

$$d\varphi_p(w) := \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi\big(\overbrace{X_1 \circ \alpha}^{\text{Kurve in } S_1 \text{ mit Richtung } w}\big)(t) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \left[(X_2 \circ X_1^{-1}) \circ (X_1 \circ \alpha)\right](t) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 (X_2 \circ \alpha)(t) = u'(0)(X_2)_u(\alpha(0))$$
$$+ v'(0)(X_2)_v(\alpha(0))$$

und man bekommt:

$$d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w) = (u'(0))^2 \underbrace{(X_2)_u(\alpha(0)) \cdot (X_2)_u(\alpha(0))}_{= E_2(\alpha(0))} +$$

$$+ 2\, u'(0)\, v'(0) \underbrace{(X_2)_u(\alpha(0)) \cdot (X_2)_v(\alpha(0))}_{= \mathcal{F}_2(\alpha(0))}$$

$$+ (v'(0))^2 \underbrace{(X_2)_v(\alpha(0)) \cdot (X_2)_v(\alpha(0))}_{= \mathcal{G}_2(\alpha(0))} \underset{\text{Vor.}}{=}$$

$$(u'(0))^2\, \mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2\, u'(0)\, v'(0)\, \mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2\, \mathcal{G}_1(\alpha(0)).$$

Zugleich ist offenbar $\left(w = \frac{d}{dt}\big|_0 X_1(\alpha(t)) = u'(0) \cdot (X_1)_u(\alpha(0)) + v'(0)\,(X_1)_v(\alpha(0)) \right)$

$$w \cdot w = \frac{d}{dt}\Big|_0 X_1(\alpha(t)) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 X_1(\alpha(t)) =$$

$$(u'(0))^2\, (X_1)_u(\alpha(0)) \cdot (X_1)_u(\alpha(0)) + 2\, u'(0)\, v'(0)\, (X_1)_u(\alpha(0)) \cdot (X_1)_v(\alpha(0)) +$$

$$(v'(0))^2\, (X_1)_v(\alpha(0)) \cdot (X_1)_v(\alpha(0)) =$$

$$(u'(0))^2\, \mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2\, u'(0)\, v'(0)\, \mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2\, \mathcal{G}_1(\alpha(0)),$$

also $d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w) = w \cdot w$. $\square$

Als Anwendung von Satz 1 folgt

$\boxed{\text{Katenoid und Helikoid sind lokal isometrisch.}}$

Dazu beachtet man:

$$X^K(u,v) = (\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ v)$$

ist eine Parametrisierung des Katenoids, und für Rotationsflächen

$$X(u,v) = (f(v) \cos u,\ f(v) \sin u,\ g(v))$$

gilt allgemein

$$\mathcal{E} = f^2,\quad \mathcal{F} = 0,\quad \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2,$$

so dass

$$(1) \qquad \mathcal{E}^K = \cosh^2 v,\quad \mathcal{F}^K \equiv 0,\quad \mathcal{G}^K = 1 + \sinh^2 v.$$

Das Helikoid war ursprünglich parametrisiert durch

$$Y(u,v) = (v \cos u,\ v \sin u,\ u),$$

mit der Ersetzung $v \leftrightarrow \sinh v$ ergibt sich

$$X^H(u,v) = (\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ u),$$

und man rechnet nach

$$X^H_u = (-\sinh v \sin u,\ \sinh v \cos u,\ 1),\ X^H_v = \ldots\ldots \Longrightarrow$$

$$\mathcal{E}^H = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v, \quad \mathcal{F}^H = X_u^H \cdot X_v^H = 0, \tag{2}$$
$$\mathcal{G}^H = \cosh^2 v,$$

so dass aus (1), (2) mit Satz 1 die lokale Isometrie beider Flächen folgt.

$\square$

Ist S eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, so ist für $p, q \in S$ die Zahl $|p-q|$ (= Euklidischer Abstand in $\mathbb{R}^3$) <u>nicht</u> die Größe, die den Abstand von p und q auf S, also den sogenannten inneren Abstand, misst.

<u>Definition 3:</u> Für $p, q \in S$ sei

$$d(p,q) := \inf \{ L(c) : c \text{ Kurve in } S \text{ von } p \text{ nach } q \}.$$

$d(p,q)$ heißt <u>innerer Abstand</u> von p zu q in S.

Hierbei werden nur <u>zusammenhängende Flächen</u> S betrachtet, d.h. zu $p, q \in S$ gibt es mindestens eine Kurve c, die in p startet, ganz in S verläuft, um in q zu enden.

Satz 2: $d : S \times S \to [0,\infty)$ macht S zu einem metrischen Raum.

Beweis: i) $d \geq 0$ klar; es ist $d(p,p) = 0$, denn $c(t) \equiv p$ verbindet p mit sich selbst.

ii) Sei $d(p,q) = 0$. Wegen (wieso?!)

$$|p-q| \leq d(p,q)$$

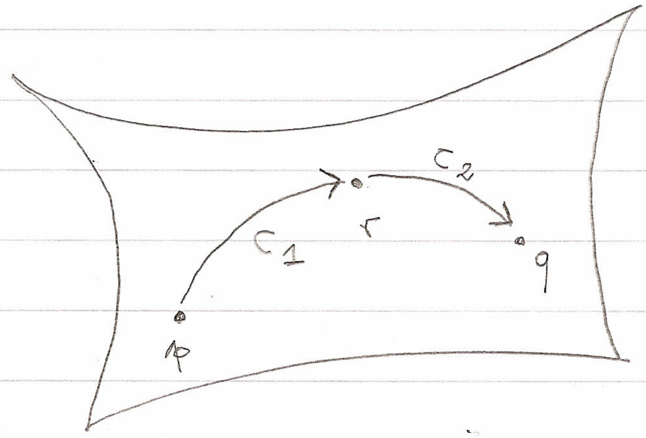
ist dann $p = q$.

iii) Die Symmetrie $d(p,q) = d(q,p)$ ergibt sich, da man zur Berechnung von $d(q,p)$ alle Kurven von p nach q rückwärts durchlaufen kann.

iv) Zu zeigen ist $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

für beliebige Punkte $p, q, r \in S$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle man Kurven c_1 von p nach r bzw. c_2 von r nach q mit



$$L(c_1) \leq d(p,r) + \varepsilon, \quad L(c_2) \leq d(r,q) + \varepsilon.$$

Der zusammengesetzte Weg $c_1 c_2$ führt von p nach q, so dass

$$d(p,q) \leq L(c_1 c_2) = L(c_1) + L(c_2) \leq$$

$$2\varepsilon + d(p,r) + d(r,q),$$

wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung. $\square$

<u>Satz 3:</u> Seien S, S' reguläre Flächen, $\varphi: S \to S'$ sei ein Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ ist eine Isometrie} \iff \\ (*) \quad L^S(c) = L^{S'}(\varphi \circ c) \quad \forall\, c = \text{Kurve in } S \end{array}}$$

<u>Bemerkung:</u> $(*)$ sagt aus, dass φ die Kurve c in S in die Kurve $\varphi \circ c$ mit gleicher Länge abbildet.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Sei also φ Isometrie $S \longrightarrow S'$ und $c : [a,b] \longrightarrow S$ eine Kurve. Dann gilt

$$L^{S'}(\varphi \circ c) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt}(\varphi \circ c) \right| dt =$$

$$\int_a^b \left(d\varphi_c(c'(t)) \cdot d\varphi_c(c'(t)) \right)^{1/2} dt \underset{\text{Def. 2 c)}}{=}$$

$$\int_a^b \left(c'(t) \cdot c'(t) \right)^{1/2} dt = L^S(c).$$

„$\Longleftarrow$" Sei die Bedingung $(*)$ aus Satz 3 erfüllt. Angenommen, es gibt $p \in S$ und $w \in T_pS - \{0\}$ mit

$$w \cdot w < d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w).$$

(den Fall „>" führt man entsprechend zum Widerspruch!)

Sei $c: [-\varepsilon, \varepsilon] \to S$ eine Kurve mit $c(0) = p$, $c'(0) = w$

und somit (**) $|c'(0)|^2 < |(\varphi \circ c)'(0)|^2$.

Für $\varepsilon << 1$ kann man annehmen, dass (**) nicht nur

für $t = 0$ sondern für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ richtig ist.

(Das ist ein Stetigkeitsargument, denn $t \mapsto |c'(t)|^2$,

$t \mapsto |(\varphi \circ c)'(t)|^2$ sind stetig.). Es folgt

$$L^S(c) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |c'(t)|\,dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |(\varphi \circ c)'(t)|\,dt = L^{S'}(\varphi \circ c),$$

Widerspruch!

$\square$

<u>Korollar</u>: Sind S und S' zusammenhängende Flächen

und $\varphi: S \to S'$ eine <u>Isometrie</u>, so gilt für alle

$p, q \in S$ $\qquad d^S(p,q) = d^{S'}(\varphi(p), \varphi(q))$.

§ 2 Konforme Abbildungen

Der Begriff der Isometrie von Flächen ist eine natürliche Äquivalenz hinsichtlich der metrischen Eigenschaften von Flächen, man denke etwa an die inneren Längenmessung. Eine abgeschwächte Version der Äquivalenz von Flächen unter Isometrien ist die sogenannte konforme Äquivalenz.

Definition 4: Seien S, S' reguläre Flächen. Ein Diffeomorphismus $\varphi: S \to S'$ heißt konform, wenn gilt:

Für alle $p \in S$ und alle $w, \tilde{w} \in T_p S$ ist

$$\boxed{d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = \lambda^2(p)\, w \cdot \tilde{w}}$$

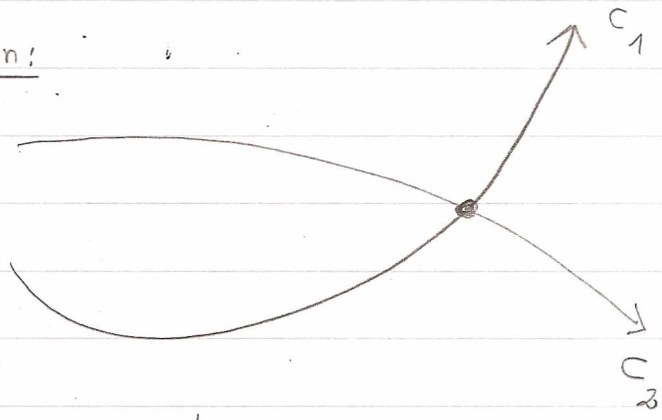
mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$.

Bemerkungen: 1.) $\lambda^2 \equiv 1 \iff \varphi$ Isometrie

2.) Man nennt S, S' konform äquivalent, falls es eine konforme Abbildung $\varphi: S \to S'$ gibt. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation (!).

3.) Ist $\varphi: S \to S'$ differenzierbar, so heißt φ <u>lokal konforme Abbildung</u>, falls es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung U von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $\varphi|_{U \cap S}: U \cap S \to \varphi(U \cap S) \subset S'$ konform.

<u>Geometrische Interpretation:</u>



Seien c_1, c_2 zwei Kurven in S, $c_1, c_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, die sich zur Zeit $t = 0$ schneiden. Für den Schnittwinkel Θ bei $t = 0$ gilt

$$\cos \Theta = \frac{c_1'(0)}{|c_1'(0)|} \cdot \frac{c_2'(0)}{|c_2'(0)|} .$$

Ist $\varphi: S \to S'$ konform, so gehen c_1, c_2 über in $\varphi \circ c_1, \varphi \circ c_2$. Diese schneiden sich ebenfalls in $t = 0$

mit Schnittwinkel $\tilde{\Theta}'$, für den gilt:

$$\cos \tilde{\Theta}' = \frac{(\varphi \circ c_1)'(0)}{|(\varphi \circ c_1)'(0)|} \cdot \frac{(\varphi \circ c_2)'(0)}{|(\varphi \circ c_2)'(0)|} =$$

$$\frac{\lambda^2 \; c_1'(0) \cdot c_2'(0)}{\lambda^2 \, |c_1'(0)| \, |c_2'(0)|} = \cos \tilde{\Theta} .$$

Konforme Abbildungen erhalten zwar <u>nicht die Längen</u> zwischen Vektoren, <u>aber sie sind winkeltreu.</u>

$\square$

Satz 1 hat das folgende Analogon im Kontext konformer Abbildungen:

<u>Satz 4:</u> Seien S_1, S_2 reguläre Flächen und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Angenommen, es gibt lokale Parametrisierungen $X_1 : U \to S_1$, $X_2 : U \to S_2$, so dass für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform gilt $E_1 = \lambda^2 E_2$, $F_1 = \lambda^2 F_2$, $G_1 = \lambda^2 G_2$ mit $\lambda^2 > 0$ und glatt auf U. <u>Dann ist</u> $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \to S_2$ <u>lokal konform.</u>